

Торайғыров университетінің  
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ  
Торайғыров университета

---

# Торайғыров университетінің ХАБАРШЫСЫ

Энергетикалық сериясы  
1997 жылдан бастап шығады



## ВЕСТНИК Торайғыров университета

Энергетическая серия  
Издается с 1997 года

ISSN 2710-3420

№ 3 (2020)

---

Павлодар

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ**  
**Вестник Торайгыров университета**

**Энергетическая серия**  
выходит 4 раза в год

---

**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о постановке на переучет периодического печатного издания,  
информационного агентства и сетевого издания  
KZ19VRY00029272

выдано

Министерство информации и общественного развития  
Республики Казахстан

**Тематическая направленность**

публикация материалов в области электроэнергетики,  
электротехнологии, автоматизации, автоматизированных  
и информационных систем, электромеханики  
и теплоэнергетики

**Подписной индекс – 76136**

---

**Бас редакторы – главный редактор**

Кислов А. П.

*к.т.н., доцент*

Заместитель главного редактора

Талипов О. М., *доктор PhD, доцент*

Ответственный секретарь

Приходько Е. В., *к.т.н., профессор*

**Редакция алқасы – Редакционная коллегия**

Клецель М. Я., *д.т.н., профессор*  
Новожилов А. Н., *д.т.н., профессор*  
Никитин К. И., *д.т.н., профессор (Россия)*  
Никифоров А. С., *д.т.н., профессор*  
Новожилов Т. А., *к.т.н., доцент (Россия)*  
Оспанова Н. Н., *к.п.н., доцент*  
Нефтисов А. В., *доктор PhD, доцент*  
Шокубаева З. Ж. *технический редактор*

---

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели  
Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов  
При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник Торайгыров университета» обязательна

<https://doi.org/10.48081/WSUT2843>**А. Т. Турешбаев, Н. А. Турлугулова**Кызылординский университет имени Кorkыт Ата,  
Республика Казахстан, г. Кызылорда

## **О ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ И ИЗЛУЧАЮЩИМИ МАССАМИ**

*В работе рассматривается фотогравитационная ограниченная задача трех тел с переменными массами. При этом сила светового давления, действующая на частицу, зависит не только от излучательной способности звезды, но и характеристик (геометрических размеров, плотности, отражательной способности) конкретной частицы. На достаточно крупные и наиболее плотные частицы наибольшее действие оказывает сила тяготения звезды, следовательно,  $q > 0$ . Для мельчайших частиц с высокими парусностью и коэффициентом отражения действие силы света преобладает над гравитацией ( $q < 0$ ).*

*В зависимости от интенсивности излучения компонентов звездной пары коэффициенты редукции масс могут принимать отрицательные значения, значительно превосходящие по модулю единицы.*

*Получены дифференциальные уравнения невозмущенного движения пассивно гравитирующей точки. Найдены частные решения уравнений движения – коллинеарные, треугольные и компланарные точки либрации. Доказано, что скопление газопылевых частиц в окрестности треугольных точек либрации возможно лишь тогда, когда гравитационные силы компонентов звездной пары одновременно превосходят силы их светового давления. Установлено, что других пространственных решений, кроме компланарных точек либрации, в фотогравитационной задаче трех тел с переменными массами не существуют.*

*Ключевые слова: двойная звезда, фотогравитация, редукция, переменные массы, частица, парусность, световое давление, точки либрации.*

## **Введение**

Известно, что более половины звезд в нашей Галактике являются составляющими двойных и тройных звезд или систем звезд еще большей кратности. При этом на тех или иных этапах эволюции звездных систем между их компонентами происходит обмен массами. Следовательно, достаточно совершенной математической моделью для многих астрономических задач, несомненно, является ограниченная задача трех тел, когда массы основных тел не остаются постоянными. Ограниченной задаче трех тел с переменными массами посвящено достаточно большое количество исследований [1]. По-видимому, первой работой, устанавливающей существование эйлеровых и лагранжевых решений плоской ограниченной задачи трех тел с переменными массами является [2]. Пространственный вариант задачи трех тел с переменными массами впервые рассматривались в работе [3]. В настоящей работе рассматривается фотогравитационная ограниченная задача трех тел с переменными массами.

Найдены частные решения уравнений движения – коллинеарные, треугольные и компланарные точки либрации. Скопление частиц в треугольных точках возможно лишь тогда, когда гравитационные силы компонентов звездной пары одновременно превосходят силы их светового давления. В коллинеарных и компланарных точках возможно облачное скопление частиц как с положительными, так и с отрицательными коэффициентами редукации масс двойной звезды. Доказано, что других пространственных решений, кроме компланарных точек либрации, в фотогравитационной задаче трех тел с переменными массами не существуют.

**Объект исследования:** Стационарные состояния частиц (обладающих значительной парусностью) в фотогравитационном поле двойной звезды с переменными массами.

**Предмет исследования:** Установление существования коллинеарных, треугольных и компланарных решений.

**Цель исследования:** Исследование динамики скоплений частиц газопылевых образований в репульсивно-гравитационном поле двойных звезд с переменными массами

### **Задачи исследования:**

1 Получение дифференциальных уравнений движения пассивно гравитирующей точки в поле двойной звезды.

2 Определение существования частных решений задачи, соответствующих положениям относительного равновесия частиц в поле двойной звезды с переменными и излучающими массами.

3 Установление существования области скоплений частиц.

**Методы и результаты исследования:** Используются методы исследования небесной механики, теории дифференциальных уравнений а также методы компьютерного моделирования.

### Основная часть

Постановка задачи. Уравнения невозмущенного движения.

В фотогравитационной небесной механике наряду с силами ньютоновского притяжения  $F_g$  учитывается световое давление  $F_p$ , исходящее от излучающего тела (звезды) [4]. В ряде случаев световой поток бывает такой интенсивности, что сила  $F_p$  конкурирует с силой тяготения  $F_g$ , даже превосходит ее по величине. Результирующую силу можно записать в виде [5]:

$$F = F_g - F_p = \frac{fMm}{r^2} - \frac{GS}{r^2} = \frac{fMm}{r^2} \left( 1 - \frac{G}{fM} \cdot \frac{S}{m} \right) = F_q q, \quad (1)$$

где,  $r$  – расстояние частицы до звезды массы  $M$ ,  $f$  – гравитационная постоянная,  $G$  – интенсивность излучения,  $S$  – площадь поперечного сечения частицы,  $q$  – коэффициент редукции массы звезды, а отношение  $S/m$  называется парусностью частицы. Сила светового давления зависит не только от излучательной способности звезды, но и характеристик (геометрических размеров, плотности, отражательной способности) конкретной частицы. Связь между параметрами звезды и частицы дает коэффициент редукции

$$q = 1 - (1 + \varepsilon) A \frac{E}{fM} \quad (2)$$

здесь,  $fM$  – гравитационный параметр звезды,  $E$  – коэффициент, характеризующий мощность источника излучения,  $A=S/m$  – парусность частицы,  $\varepsilon$  – коэффициент отражения света. Для каждой частицы коэффициент  $q$  имеет постоянное значение и характеризует степень восприимчивости частицы к излучению. На достаточно крупные и наиболее плотные частицы с малыми значениями параметров  $A$  и  $\varepsilon$  наибольшее действие оказывает сила тяготения звезды, следовательно,  $q > 0$ . Для мельчайших частиц с высокими парусностью и коэффициентом отражения действие силы света преобладает над гравитацией ( $q < 0$ ).

Фотогравитационная задача трех тел, введенная в рассмотрение В. В. Радзиевским и позволяющая учесть фактор световой репульсии, стала адекватной динамической моделью для изучения движения микрочастиц в системе, подобной системе Солнце–планета–частица, а также в гравитационно – репульсивном поле двойных звездных систем. В настоящей работе рассматривается ограниченная задача трех тел с двумя переменными

излучающими массами, некоторые результаты которой были анонсированы в работе [6].

Предположим, что движения основных излучающих тел определяется задачей Гюльдена – Мещерского. Уравнения движения пассивно гравитирующей точки в фотогравитационном поле двойных звезд с переменными массами  $m_1(t)$  и  $m_2(t)$  во вращающейся вместе с основными телами барицентрической системе координат  $x, y, z$  вокруг оси  $z$ , направленной в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y}\dot{\varphi} &= \dot{\varphi}^2 x + \ddot{y} - \frac{q_1\mu_1}{r_1^3}(x - x_1) - \frac{q_2\mu_2}{r_2^3}(x - x_2), \\ \ddot{y} + 2\dot{x}\dot{\varphi} &= \dot{\varphi}^2 y - \ddot{x} - \frac{q_1\mu_1}{r_1^3}y - \frac{q_2\mu_2}{r_2^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{q_1\mu_1}{r_1^3}z - \frac{q_2\mu_2}{r_2^3}z, \end{aligned} \quad (3)$$

где,  $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2 + z^2}$  ( $i=1,2$ ) – расстояния пассивно гравитирующей точки  $P(x, y, z)$  до основных излучающих тел (звезд)  $S_1(x_1, 0, 0)$ ,  $S_2(x_2, 0, 0)$ ,  $\dot{\varphi} = \omega(t)$  угловая скорость обращения тел,  $q_1 \in ]-\infty, 1]$ ,  $q_2 \in ]-\infty, 1]$  – коэффициенты редукции массы звезд,  $\mu_1 = fm_1(t)$ ,  $\mu_2 = fm_2(t)$ ,  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ,  $f$  – гравитационная постоянная. Здесь изменение масс звезд считаем происходящим пропорционально друг другу и подчиняющимся закону Мещерского [7]:

$$\mu(t) = \mu_0 R(t), \quad \mu_1(t) = \mu_{10} R(t), \quad \mu_2(t) = \mu_{20} R(t), \quad (4)$$

где  $\mu_0, \mu_{10}, \mu_{20}$  – неизменные массы ( $\mu_0 = \mu_{10} + \mu_{20}$ ,  $\mu_{10} > \mu_{20}$ ),

$$\begin{aligned} R(t) &= \sqrt{\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ – постоянные величины,} \\ x_1 &= -\frac{\mu_2}{\mu} \cdot r = x_{10} R(t), \quad x_2 = \frac{\mu_1}{\mu} r = x_{20} R(t), \\ x_{10} &= -\frac{\mu_{20}}{\mu_0} r_0, \quad x_{20} = \frac{\mu_{10}}{\mu_0} r_0. \end{aligned} \quad (5)$$

При выполнении объединенного закона Мещерского расстояние  $r$  в выражениях (5) определяется уравнениями общей задачи двух тел  $M_1$  и  $M_2$  в полярных координатах

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} &= 0, \\ r^2 \dot{\vartheta} &= C, \end{aligned} \quad (6)$$

которые допускают частное решение

$$r(t) = r_0 R(t), \quad \omega(t) = \omega_0 / R^2(t), \quad (7)$$

где  $r_0$  и  $\omega_0$  – постоянные величины, отвечающие соотношениям

$$\begin{cases} \mu_0 / r_0^2 + \alpha\gamma - \beta^2 - \omega_0^2 = 0, \\ r_0^2 \omega = C. \end{cases} \quad (8)$$

Система (6) допускает частный интеграл

$$r\mu = \chi C^2, \quad (9)$$

справедливый лишь для множества частных решений (7). Здесь  $\chi$  – произвольная постоянная. Таким образом, в уравнении (3) величины  $x_1, x_2, \mu_1, \mu_2$  и  $\dot{\vartheta}$  являются известными функциями времени.

Частные решения фотогравитационной ограниченной задачи трех тел с переменными массами

Частное решение исходной системы (3) будем искать в виде

$$x = \xi R(t), \quad y = \eta R(t), \quad z = \zeta R(t), \quad (10)$$

где,  $\xi, \eta, \zeta$  – подлежащие определению постоянные величины. Подставляя (10) в (3) с учетом (5), после предварительного определения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \xi \frac{\alpha t + \beta}{R}, & \dot{y} &= \eta \frac{\alpha t + \beta}{R}, & \dot{z} &= \zeta \frac{\alpha t + \beta}{R}, \\ \ddot{x} &= \xi \frac{\alpha R^2 - a^2}{R^3}, & \ddot{y} &= \eta \frac{\alpha R^2 - a^2}{R^3}, & \ddot{z} &= \zeta \frac{\alpha R^2 - a^2}{R^3}. \\ \dot{\omega} &= \omega_0 / R^2, & \ddot{\omega} &= -2\omega_0(\alpha t + \beta) / R^4, & a &= \alpha\gamma - \beta^2, \\ R^2 &= \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} (a - \omega_0^2)\xi + \frac{q_1\mu_{10}}{\rho_1^3}(\xi - x_{10}) + \frac{q_2\mu_{20}}{\rho_2^3}(\xi - x_{20}) &= 0, \\ (a - \omega_0^2 + \frac{q_1\mu_{10}}{\rho_1^3} + \frac{q_2\mu_{20}}{\rho_2^3})\eta &= 0, \\ (a + \frac{q_1\mu_{10}}{\rho_1^3} + \frac{q_2\mu_{20}}{\rho_2^3})\zeta &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\rho_i = \sqrt{(\xi - x_{i0})^2 + \eta^2 + \zeta^2} \quad (i = 1, 2).$

Заметим, что при  $a=0$  функция  $R(t)$  становится линейной функцией времени, а уравнения (11) преобразуются в соответствующие уравнения фотогравитационной ограниченной задачи трех тел с постоянными массами [8, 9].

Для удобства в дальнейшем выберем следующие единицы измерений: за единицу длины примем  $r_0 = r(t_0) / R(t_0)$ ; за единицу массы  $\mu_0 / f = [m_1(t_0) + m_2(t_0)]R(t_0) = 1$ , т.е.  $\mu_0 = f$ ; единицу времени выберем так, чтобы  $\omega_0 = 1$ , т.е.  $\omega(t_0) \cdot R^2(t_0) = 1$ , где  $t_0$  – начальный момент времени. После такого выбора единиц измерения легко получить следующие соотношения

$$\begin{aligned} \mu_{10} &= f(1 - \nu), & \mu_{20} &= f\nu, & f &= \chi, \\ a &= \alpha\gamma - \beta^2 = 1 - \chi, & C &= 1, & r_0 &= 1. \\ x_{10} &= -\nu, & x_{20} &= 1 - \nu, & \mu_0 &= f = \chi \end{aligned} \quad (12)$$



Система уравнений с учетом выбранных единиц измерения примет вид:

$$\begin{aligned} \xi - \frac{q_1(1-\nu)}{\rho_1^3}(\xi + \nu) - \frac{q_2\nu}{\rho_2^3}(\xi + \nu - 1) &= 0, \\ \left(1 - \frac{q_1(1-\nu)}{\rho_1^3} - \frac{q_2\nu}{\rho_2^3}\right)\eta &= 0, \\ \left(\chi - 1 - \chi \frac{q_1(1-\nu)}{\rho_1^3} - \chi \frac{q_2\nu}{\rho_2^3}\right)\zeta &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

здесь  $\rho_1 = \sqrt{(\xi - \nu)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ ,  $\rho_2 = \sqrt{(\xi + \nu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ ,

$\nu$  – массовый параметр ( $0 < \nu = 1/2$ ),  $\chi \in ]0, \infty [$  при  $\alpha > 0$  и  $\chi \in ]1, \infty [$  при  $\alpha = 0$ .

При  $\chi = 1$  уравнение (13) в точности совпадает с соответствующими уравнениями обобщенной пространственной фотогравитационной ограниченной задачи трех тел с постоянными массами, отвечающим ее частным решениям. Для любых других значений  $\chi$  первые два уравнения системы (13) соответствуют аналогичным уравнениям плоской фотогравитационной задачи трех тел, определяющим семейства коллинеарных и треугольных точек либрации [10]. В качестве сравнительного анализа возможных числовых значений коэффициентов редукции масс звездной пары ниже приводятся (рисунок 1,2) облачные скопления частиц в коллинеарных точках либрации (КТЛ) фотогравитационной ограниченной задачи трех тел с постоянными массами.

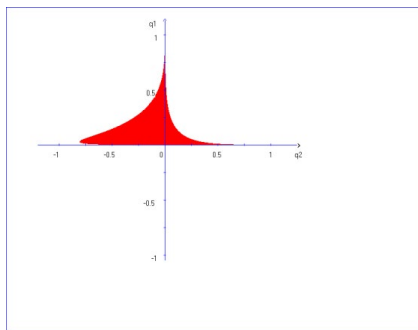


Рисунок 1 – Область скоплений частиц КТЛ для  $\mu=0,01$

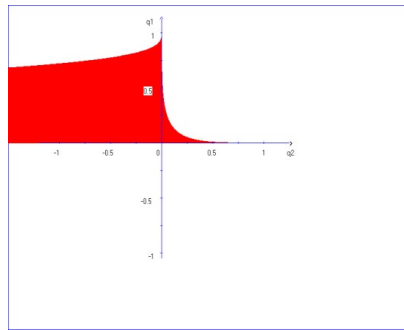


Рисунок 2 – Область скоплений частиц КТЛ для  $\mu=0,0001$

Как видно из этих рисунков, в зависимости от интенсивности излучения компонентов звездной пары, коэффициенты редукции масс могут принимать отрицательные значения, значительно превосходящие по модулю единицы (рисунок 2).

Следует заметить, что движение пассивно гравитирующего тела отличается от соответствующего движения в классических задачах и определяется движением основных тел так, что конфигурация всех трех тел всегда остается подобной себе. Последнее уравнение системы (13) отличается от соответствующего уравнения классической задачи наличием слагаемого  $\chi - 1$  и коэффициентов редукции  $q_1, q_2$ . Таким образом, уравнения (10), отвечающие частному решению исходной системы дифференциальных уравнений невозмущенного движения фотогравитационной ограниченной задачи трех тел с переменными массами, в отличие от соответствующей задачи трех тел с переменными неизлучающими массами, имеющей два свободных параметра  $\nu$  и  $\chi$ , содержит еще два дополнительных параметра  $q_1, q_2$ .

Приведенные выше интервалы изменения параметров, задаваемые неравенствами относительно  $\nu$  и  $\chi$  объясняются аналогичными неравенствами для  $\nu$  классической задачи и неравенствами для  $\chi$  из условия положительности масс, расстояний  $r$  и функции  $R(t)$ . Значение же  $\chi = 1$ , как было отмечено, соответствует первому закону Мещерского.

Для удобства анализа перепишем уравнения (13) в следующем виде:

$$\begin{cases} u\xi - \left(\frac{q_1}{\rho_1^3} - \frac{q_2}{\rho_2^3}\right)(1-\nu)v = 0, \\ u\eta = 0, \\ (1-u\chi)\zeta = 0, \end{cases} \quad (14)$$

где  $u = 1 - \frac{q_1(1-\nu)}{\rho_1^3} - \frac{q_2\nu}{\rho_2^3}$ .

Определим треугольные точки либрации, расположенные в плоскости  $\xi\eta$  орбитального движения основных тел с переменными массами. Полагая в (14)  $\xi \neq 0, \eta \neq 0, \zeta = 0$ , имеем, что  $u = 0$ . Тогда из первого уравнения системы (14) получим выражение

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\rho_1^3}{\rho_2^3}, \quad (15)$$

определяющее семейство треугольных решений, которое возможно, как и в фотогравитационной задаче трех тел с постоянными массами только для положительных значений  $q_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Для отыскания компланарных решений, расположенных в плоскости  $\xi\zeta$ , рассматриваем два первых уравнения (12, 13). Определив выражения для  $\rho_1^2$  и  $\rho_2^2$ , затем используя

$$\rho_2^2 - \rho_1^2 = \left[ \frac{q_2 \nu \chi}{-\xi + \nu(\chi - 1)} \right]^{2/3} - \left[ \frac{q_1(1-\nu)\chi}{\xi + (1-\nu)(\chi - 1)} \right]^{2/3} = 1 - 2(\xi + \nu), \quad (16)$$

и разрешив (16) относительно одного из коэффициентов редукции, например,  $q_1$ , имеем

$$q_1 = \pm \left\{ \frac{\left[ \frac{q_2 \nu \chi}{(\chi - 1)\nu - \xi} \right]^{2/3} + 2(\xi + \nu) - 1}{\left[ \frac{(1-\nu)\chi}{\xi + (1-\nu)(\chi - 1)} \right]^{2/3}} \right\}^{3/2} \quad (17)$$

Это означает, что в фотогравитационной задаче трех тел с переменными массами скопление газопылевых частиц в окрестности треугольных точек возможно лишь тогда, когда гравитационные силы основных излучающих тел одновременно превосходит силы их светового давления.

Далее рассматривая  $q_1$  как функцию  $\xi$  для фиксированных значений параметров  $\nu$ ,  $\chi$  и  $q_2$ , на плоскости  $q_1\xi$  можно получить семейство кривых, определяющих число и расположение компланарных точек либрации. Поставим теперь задачу определения произвольных пространственных решений, не являющихся компланарными. Полагая  $\xi \neq 0, \eta \neq 0$ , и  $\zeta \neq 0$ , из второго уравнения системы (14) имеем  $u = 0$ . Тогда из третьего уравнения этой же системы следует, что  $\zeta = 0$ , что противоречит нашему предположению.

Итак, случай  $\xi \neq 0, \eta \neq 0, \zeta \neq 0$ , что соответствует  $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$  невозможен. Это означает, что пространственных, кроме компланарных решений, в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел с переменными массами не существуют.

### Выводы

Получены дифференциальные уравнения невозмущенного движения частицы в фотогравитационном поле двойной звезды с переменными массами. Найдены частные решения уравнений движения – коллинеарные,

треугольные и компланарные точки либрации. Скопление частиц в треугольных точках возможно лишь тогда, когда гравитационные силы компонентов звездной пары одновременно превосходят силы их светового давления. В коллинеарных и компланарных точках возможно облачное скопление частиц как с положительными, так и с отрицательными коэффициентами редукации масс двойной звезды. Доказано, что других пространственных решений, кроме компланарных точек либрации, в фотогравитационной задаче трех тел с переменными массами не существуют.

## Список использованной литературы

1 **Беков, А. А.** Динамика двойных гравитирующих систем с переменными массами : учебное пособие / А. А. Беков. – Saarbrücken, Deutschland : LAP LAMBERT Academic Publishing. GmbH&Co. KG., 2015. – 224 с.

2 **Беков, А. А.** Динамика двойных нестационарных гравитирующих систем : учебное пособие / А. А. Беков. – Алматы : Ғылым, 2013. – 170 с.

3 **Беков, А. А., Астемесова, К. С., Усипбекова, Д. И.** Об эволюции излучающих двойных систем с переменной массой // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2013. – № 4. – С. 70–74.

4 **Усипбекова, Д. И.** Исследование ограниченной нестационарной фотогравитационной задачи двух и трех тел : дисс. на соискание ученой степени доктора философии (PhD) / Д. И. Усипбекова Д. И. – Алматы, 2014. – 121 с.

5 **Турешбаев, А. Т.** Нелинейный анализ устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной фотогравитационной плоской задаче трех тел // Математический журнал МОН РК. – 2010. – Т. 10. – № 3(37). – С. 101–106.

6 **Турешбаев, А. Т.** О периодических движениях в фотогравитационной ограниченной задаче трех тел // Математический журнал МОН РК. – 2010. – Т. 10. – № 4 (38). – С. 89–93.

7 **Турешбаев, А. Т.** Об устойчивости треугольных точек либрации фотогравитационной ограниченной задачи трех тел с двумя излучающими массами / Материалы XIII Международной конференции / Устойчивость и колебания нелинейных систем управления. – М. : ИПУ РАН, 2016. – С. 377–380.

8 **Tureshbaev, A. T.** Stability of libration points of the photogravitational restricted three body problem with two radiating masses / International Conference // Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems. IEEE Xplore. Web of Science Core Collection, Scopus. – 2016. [Electronic resource]. – <http://ieeexplore.ieee.org/document/7541234/>.

9 **Турешбаев, А. Т., Омарова, У. Ш., Мырзаев, Р. С.** Об устойчивости коллинеарных точек либрации в пространственной фотогравитационной задаче трех тел с двумя излучающими массами / Материалы XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Уфа, 2019. – Т. 1. – С. 135–137.

10 **Турешбаев, А. Т., Омарова, У. Ш., Мырзаев, Р. С.** Об устойчивости компланарных точек либрации и периодические движения в фотогравитационной задаче трех тел / Материалы первой Международной конференции // Проблемы механики и управления. – М. : Издательство МГУ им. Ломоносова, 2018. – С. 396–400.

## References

1 **Bekov, A. A.** Dinamika dvojnıx gravitiruyushhix sistem s peremenny`mi massami : [Dynamics of double gravitating systems with variable masses : textbook]. In A. A. Bekov (eds.) – Saarbrucken, Deutschland : LAP LAMBERT Academic Publishing. GmbH&Co. KG., 2015. – 224 p.

2 **Bekov, A. A.** Dinamika dvojnıx nestacionarnıx gravitiruyushhix sistem : uchebnoe posobie [Dynamics of double non-stationary gravitating systems : textbook]. In A. A. Bekov. – Almaty : Gylym, 2013. – 170 p.

3 **Bekov, A. A., Astemesova, K. S., Usipbekova, D. I.** Ob e`volyuicii izluchayushhix dvojnıx sistem s peremennoj massoj [The evolution of the emitting binary systems with a variable mass]. In Izvestiya NAS RK. Physics and mathematics series. – 2013. – No. 4. – P. 70–74.

4 **Usipbekova, D. I.** Issledovanie ogranichennoj nestacionarnoj fotogravitacionnoj zadachi dvux i trex tel : diss. na soiskanie uchenoj stepeni doktora filosofii (PhD). [Investigation of a limited non-stationary photogravitational problem of two and three bodies : Diss. for the degree of doctor of philosophy (PhD)]. In D. I. Usypbekova. (eds.) – Almaty, 2014. – 121 p.

5 **Tureshbaev, A. T.** Nelinejnıj analiz ustojchivosti treugol`nyx toчек libracii v obobshhennoj fotogravitacionnoj ploskoj zadache trex tel [Nonlinear analysis of the stability of the triangular libration points in the generalized photogravitational the planar problem of three bodies. In Matematicheskij zhurnal MON RK. Mathematical journal of the MES RK. – 2010. – Vol. 10. – № 3(37). – P. 101–106.

6 **Tureshbaev, A. T.** O periodicheskix dvizheniyax v fotogravitacionnoj ogranichennoj zadache trex tel [Of periodic motions in photogravitational restricted problem of three bodies. Matematicheskij zhurnal MON RK. In Mathematical journal of the MES RK]. – 2010. – T. 10. – № 4 (38). – P. 89–93.]

7 **Tureshbaev, A. T.** Ob ustojchivosti treugol'ny`x toček libracii fotogravitacionnoj ogranichennoj zadachi trex tel s dvumya izluchayushhimi massami [On stability of triangular libration points photogravitational the restricted problem of three bodies with two radiating masses] In Proceedings of the XIII International conference «Stability and oscillations of nonlinear control systems». – M. : IPU Russian Academy of Sciences, 2016. – P. 377–380.

8 **Tureshbaev, A. T.** Stability of libration points of the photogravitational restricted three body problem with two radiating masses. In International Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems». IEEE Xplore. Web of Science Core Collection, Scopus. – 2016. [Electronic resource]. – <http://ieeexplore.ieee.org/document/7541234/>.

9 **Tureshbaev, A. T., Omarova, U. Sh., Myrzaev, R. S.** Ob ustojchivosti kollinearny`x toček libracii v prostranstvennoj fotogravitacionnoj zadache trex tel s dvumya izluchayushhimi massami [On the stability of collinear libration points in the spatial photogravitational problem of three bodies with two radiating masses]. In proceedings of the XII all-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics. – Ufa, 2019. – Vol. 1. – P. 135–137.

10 **Tureshbaev, A. T., Omarova, U. Sh., Myrzaev, R. S.** Ob ustojchivosti komplanarny`x toček libracii i periodicheskie dvizheniya v fotogravitacionnoj zadache trex tel: [On the stability of coplanar libration points and periodic motions in the photogravitational problem of three bodies]. In Proceedings of the first International conference // Problems of mechanics and control. – Moscow : Lomonosov Moscow State University Publishing House, 2018. – P. 396–400.

Материал поступил в редакцию 30.09.20.

*A. T. Туришбаев, Н. А. Турлугулова*

**Айнымалы және сәуле шығаратын массалары бар шектелген үш дене есебінің дербес шешімдері туралы**

Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университеті,  
Қазақстан Республикасы, Қызылорда қ.  
Материал 30.09.20 баспаға түсті.

*A. T. Tureshbaev, N. A. Turlugulova*

**On private solutions of the limited three body problem with variable and radiating masses**

Korkyt Ata Kyzylorda University,  
Republic of Kazakhstan, Kyzylorda.  
Material received on 30.09.20.

*Бұл жұмыста массалары айнымалы фотогравитациялық шектелген үшдене есебі қарастырылады.*

*Бұл ретте бөлшектерге әсерететін жарық қысымының күші жұлдыздың сәуле шығаруға білетіне ғана емес, сонымен қатар бөлшектің нақты сипаттамаларына (геометриялық өлшемдерге, тығыздығына, жарықтың шағылысу қабілетіне) байланысты. Айтарлықтай үлкен және тығыздығы өте жоғары болатын бөлшектерге әсерететін жұлдыздың гравитациялық тарту күші жарық қысымы күшіне қарағанда басым болады, демек,  $q > 0$ . Жоғары желкенді және шағылысу коэффициенті өте үлкен болатын өте майда бөлшектер үшін жарық күшінің әсері гравитациялық күштен анағұрлы артық болады ( $q < 0$ ).*

*Қос жұлдыз компоненттерінің жарық шығару қарқындылығына байланысты массалардың редукциялық коэффициенттері модульдері бойынша бірлік мәнінен едәуір үлкен теріс мәндерді қабылдай алады.*

*Пассивті гравитациялық нүктенің ауытқымаған қозғалысының дифференциалдық теңдеулері алынды. Қозғалыс теңдеулерінің дербес шешімдері – коллинеарлық, үшбұрыштық және компланарлық либрациялық нүктелері табылды. Үшбұрыштық нүктелер төңірегінде газ-тозаңды бөлшектердің шоғырлануы қос жұлдыз компоненттерінің гравитациялық күштері олардың жарық қысымы күшінен асып түсетін кезде ғана мүмкін болатындығы дәлелденді. Массалары айнымалы фотогравитациялық үш дене есебінде компланарлық либрациялық нүктелерден басқа кеңістіктік шешімдер болмайтындығы анықталды.*

*Кілтті сөздер: қос жұлдызфотогравитация, редукция, ауыспалы массалар, бөлшек, желкенділік сәулелі қысым, либрация нүктесі.*

*The work considers the photogravitational limited three-body problem with variable masses. In this case, the light pressure force acting on the particle depends not only on the emissivity of the star, but also on the characteristics (geometric dimensions, density, reflectivity) of a particular particle. For sufficiently large and most dense particles, the star's gravity exerts the greatest effect, therefore,  $q > 0$ . For the smallest particles with high windage and reflection coefficient, the effect of light prevails over gravity ( $q < 0$ ).*

*Depending on the radiation intensity of the components of the stellar pair, the mass reduction coefficients can take negative values, significantly exceeding unity in absolute value.*

*Differential equations of the unperturbed motion of a passively gravitating point are obtained. Particular solutions of the equations of motion – collinear, triangular, and coplanar libration points – are found. It is proved that the accumulation of gas and dust particles in the vicinity of Lagrangian points is possible only when the gravitational forces of the components of the stellar pair simultaneously exceed the forces of their light pressure. It is established that there are no other spatial solutions in the photogravitational problem of three bodies with variable masses other than coplanar libration points.*

*Keywords: double star, photogravitation, reduction, variable masses, particle, windage, light pressure, libration points.*



Теруге 30.09.2020 ж. жіберілді. Басуға 14.10.2020 ж. қол қойылды.  
Электронды баспа  
2,99 Мб RAM  
Шартты баспа табағы 23,30. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.  
Компьютерде беттеген: А. Елемесқызы  
Корректор: А. Р. Омарова  
Тапсырыс № 3707

Сдано в набор 30.09.2020 г. Подписано в печать 14.10.2020 г.  
Электронное издание  
2,99 Мб RAM  
Усл. печ. л. 23,30. Тираж 300 экз. Цена договорная.  
Компьютерная верстка: А. Елемесқызы  
Корректор: А. Р. Омарова  
Заказ № 3707

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған  
«Торайғыров университет»  
коммерциялық емес акционерлік қоғамы  
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы  
«Торайғыров университет»  
коммерциялық емес акционерлік қоғамы  
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.  
8 (7182) 67-36-69  
e-mail: kereku@tou.edu.kz  
www.vestnik.tou.edu.kz