Торайғыров университетінің
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Торайгыров университета

Торайғыров университетінің ХАБАРШЫСЫ

Энергетикалық сериясы
1997 жылдан бастап шығады

ВЕСТНИК Торайгыров университета

Энергетическая серия
Издается с 1997 года

ISSN 2710-3420

№ 3 (2020)

Павлодар

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Вестник Торайгыров университета

Энергетическая серия
выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО
о постановке на переучет периодического печатного издания, информационного агентства и сетевого издания
KZ19VPY00029272
выдано
Министерство информации и общественного развития Республики Казахстан

Тематическая направленность
публикация материалов в области электроэнергетики, электротехнологии, автоматизации, автоматизированных и информационных систем, электромеханики и теплоэнергетики

Подписной индекс – 76136

МРНТИ 27.43.17

https://doi.org/10.48081/RDBW5485

С. П. Моисеева, Т. В. Бушкова
Национальный исследовательский Томский государственный университет, Российская Федерация, г. Томск.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫХОДЯЩИХ ПОТОКОВ В СИСТЕМЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПОЛИКОМПОНЕНТНОГО ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА

В настоящей статье проводится исследование двумерного случайного процесса, характеризующего число обслуженных заявок каждого типа за время t. Получено выражение для производящей функции двумерного выходящего потока. определено, что одномерные маргинальные распределения вероятностей числа выходящих заявок являются пуассоновскими, найдены основные вероятностные характеристики.

Ключевые слова: система параллельного обслуживания, выходящий поток, распределение числа заявок, полумарковские процессы, .заявки смешанного типа.

Введение

Настоящее время диктует необходимость решение различных математических и вероятностных задач, связанных с работой сетей массового обслуживания. Расширение применения сетей массового обслуживания связано с появлением сетей ЭВМ [1], совершенствованием вычислительных процессов, аппаратного и программного обеспечения вычислительных систем.

Значительный вклад в развитие теории сетей массового обслуживания внесли Г. П. Башарин, А. А. Боровков, Э. Геленбе, Дж. Джексон, В. А. Ивницкий, Ф. П. Келли, Д. Кениг, Л. Клейнрок, Ю. В. Малинковский, М. А. Маталыцкий, П. К. Поллетт, Р. Серфозо, Г. И. Фалин и многие другие.

Сегодня большой интерес для исследования представляют собой выходящие потоки – потоки уже обслуженных заявок, которые покидают СМО. Как правило, заявки проходят через несколько последовательно связанных между собой СМО: транзитная связь, производственный конвейер и т.п. В этом случае выходящий поток является входящим для следующей СМО.

В середине XX века начали появляться работы по исследованию выходящих потоков систем массового обслуживания. Первые попытки исследования выходящих потоков в рамках классической теории были сделаны во второй половине XX в. такими учеными, как П. Берк [2], П. Финч [3]. Независимо друг от друга они показали, что выходящий поток для системы с пуассоновским входящим потоком и экспоненциальным временем обслуживания также будет являться пуассоновским. А в 1963 году Н. Мирасол [4] показал, что выходящий поток систем с неограниченным числом приборов и произвольным распределением времени обслуживания, на вход которых поступает простейший поток, также является простейшим.

Изучение выходящих потоков развивается достаточно медленно, так как не существует общих методов и подходов по их исследованию. В [5] были получены асимптотические распределения вероятностей числа обслуженных заявок в смешанной системе $M/GI/1/m$ и системе $M/M/m/t$, обслуживающее устройство которой подвержено отказам. С помощью полумарковских процессов в [6] получены условия рекуррентности выходящих потоков однолинейных систем массового обслуживания. Обзор работ 50-х – 70-х годов по исследованию выходящих потоков содержится в работе [7].

Изучение свойств выходящих потоков продолжается и в настоящее время. В [8] было найдено распределение числа заявок, обслуженных за период занятости в стационарной системе $Geom/Geom/1$ с дискретным временем. Анализу выходящих потоков в системах с циклическим обслуживанием посвящены работы исследователей из школы Нижегородского государственного университета [9].

В настоящей статье приводится исследование выходящих потоков в системе параллельного обслуживания с неограниченным числом приборов в блоках, на вход которой поступают пуассоновские потоки интенсивности поток λ_1 и λ_2, а также поток парных разнотипных заявок, моменты прихода которых образуют простейший поток с интенсивностью λ. Дисциплина обслуживания зависит от типа заявки и определяется случайной величиной, имеющей экспоненциальную функцию распределения вероятностей с соответствующими параметрами. Используя терминологию[10–11] предлагаемую модель можно назвать СМО с поликомпонентным пуассоновским потоком.

Впервые модель со сдвоенными заявками была описана в в работах украинских ученых Е. А. Лебедева, А. А. Чечельницкого и О. В. Кучеренко [13] и в дальнейшем получила свое развитеие в работах [14–15] для непуассоновских входящих потоков.

Материалы и методы

Рассмотрим систему с двумя боками обслуживания (рис. 1), каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход поступает три простейших потока с интенсивностью λ для сдвоенных заявок, для заявок первого и второго типа соответственно.

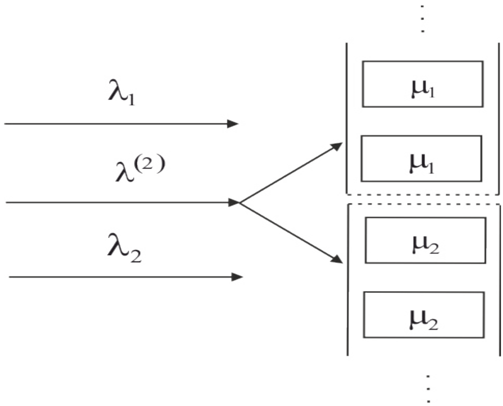

Рисунок 1 – СМО с параллельным обслуживанием заявок смешанного типа

Дисциплина обслуживания определяется тем, что одна из заявок сдвоенного потока поступает в первый, а другая во второй блоки обслуживания и занимает любой из свободных приборов, на котором выполняется ее обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Также в систему поступают два простейших потока заявок λ_1 и λ_2, заявки которых занимают свободные приборы в соответствующем типу заявки блоке обслуживания.

В настоящей статье проводится исследование двумерного случайного процесса $\{n_1(t), n_2(t)\}$, характеризующего число обслуженных заявок каждого типа за время t.

Процесс $\{n_1(t), n_2(t)\}$ немарковский, поэтому введем дополнительные компоненты, а именно $i_1(t), i_2(t)$ – число занятых приборов в первом и втором блоках.

Обозначим $P(i_1, i_2, n_1, n_2, t) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2\}$ – распределение вероятностей состояний системы.

Для распределения вероятностей рассматриваемого случайного процесса составим систему равенств:

$$P(i_1,i_2,n_1,n_2,t+\Delta t)=(1-\lambda\Delta t)(1-\lambda_1\Delta t)\times$$
$$\times(1-\lambda_2\Delta t)(1-i_1\mu_1\Delta t)(1-i_2\mu_2\Delta t)P(i_1,i_2,n_1,n_2,t)+$$
$$+\lambda\Delta tP(i_1-1,i_2-1,n_1,n_2,t)+\lambda_1\Delta tP(i_1-1,i_2,n_1,n_2,t)+\lambda_2\Delta tP(i_1,i_2-1,n_1,n_2,t)+$$
$$+(i_1+1)\mu_1\Delta tP(i_1+1,i_2,n_1-1,n_2,t)+$$
$$(i_2+1)\mu_2\Delta tP(i_1,i_2+1,n_1,n_2-1,t)+o(\Delta t) \qquad (1)$$

Откуда получаем прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(i_1,i_2,n_1,n_2,t)}{\partial t}=-(\lambda+\lambda_1+\lambda_2+i_1\mu_1+i_2\mu_2)\times$$
$$\times P(i_1,i_2,n_1,n_2,t)+(i_1+1)\mu_1P(i_1+1,i_2,n_1-1,n_2,t)+(i_2+1)\mu_2P(i_1,i_2+1,n_1,n_2-1,t)+$$
$$+\lambda P(i_1-1,i_2-1,n_1,n_2,t)+\lambda_1P(i_1-1,i_2,n_1,n_2,t)+\lambda_2P(i_1,i_2-1,n_1,n_2,t) \qquad (2)$$

решение которой удовлетворяет начальным условиям:

$$P(i_1,i_2,n_1,n_2,0)=R(i_1,i_2) \qquad (3)$$

где $R(i_1,i_2)$ – стационарное двумерное распределение числа занятых приборов в блоках обслуживания, которое совпадает с финальным и определяется равенством [12]:

$$P(i_1,i_2)=\sum_{n=0}^{\min(i,j)}\frac{c^n}{n!}\frac{a^{i-n}}{(i-n)!}\frac{b^{j-n}}{(j-n)!}\cdot e^{-d}.$$

Обозначим совместную производящую функцию процесса $\{i_1(t),i_2(t),n_1(t),n_2(t)\}: F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=\sum_{i_1}\sum_{i_2}\sum_{n_1}\sum_{n_2}x_1^{i_1}x_2^{i_2}y_1^{n_1}y_2^{n_2}\times P(i_1,i_2,n_1,n_2,t)$

тогда получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка вида:

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\partial t}+\frac{\partial F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\partial x_1}(x_1-y_1)\mu_1+$$
$$+\frac{\partial F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\partial x_2}(x_2-y_2)\mu_2= \tag{4}$$
$$=\left[\lambda(x_1x_2-1)+\lambda_1(x_1-1)+\lambda_2(x_2-1)\right]\times$$
$$\times F(x_1,x_2,y_1,y_2,t).$$

Будем считать, что в начальные моменты система функционирует в стационарном режиме, то есть начальные условия имеют вид:

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,0)=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda+\lambda_1}{\mu_1}(x_1-1)+\frac{\lambda+\lambda_2}{\mu_2}(x_2-1)\right\} \tag{5}$$

Используя метод характеристик (Эльсгольц Л.Э) получаем систему дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{\mu_1(x_1-y_1)}=\frac{dx_2}{\mu_2(x_2-y_2)}=$$
$$=\frac{dF(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\left(\lambda(x_1x_2-1)+\lambda_1(x_1-1)+\lambda_2(x_2-1)\right)F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)} \tag{6}$$

Найдем два первых интеграла системы уравнений.

Очевидно, что для уравнений:

$$dt=\frac{dx_1}{\mu_1(x_1-y_1)},\ dt=\frac{dx_2}{\mu_2(x_2-y_2)},$$

Они принимают вид:

$$x_1=y_1+C_1e^{\mu_1t},\quad C_1=(x_1-y_1)e^{-\mu_1t},$$
$$x_2=y_2+C_2e^{\mu_2t},\quad C_2=(x_2-y_2)e^{-\mu_2t}, \tag{7}$$

Последний интеграл получим из уравнения

$$\left(\lambda\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+(\lambda_1+\lambda)\left(x_1-1\right)+(\lambda_2+\lambda)\left(x_2-1\right)\right)dt = \ =\frac{dF\left(x_1,x_2,y_1,y_2,t\right)}{F\left(x_1,x_2,y_1,y_2,t\right)}.$$

$$+(\lambda_2+\lambda)\left(y_2-1+C_2e^{\mu_2 t}\right)\Big)dt=\frac{dF\left(x_1,x_2,y_1,y_2,t\right)}{F\left(x_1,x_2,y_1,y_2,t\right)} \tag{8}$$

Откуда, используя (7) имеем:

$$\Big(\lambda\left(y_1-1+C_1e^{\mu_1 t}\right)\left(y_2-1+C_2e^{\mu_2 t}\right)+(\lambda_1+\lambda)\left(y_1-1+C_1e^{\mu_1 t}\right)$$

$$+(\lambda_2+\lambda)\left(y_2-1+C_2e^{\mu_2 t}\right)\Big)dt=\frac{dF\left(x_1,x_2,y_1,y_2,t\right)}{F\left(x_1,x_2,y_1,y_2,t\right)} \tag{9}$$

После преобразований получаем дифференциальное уравнение вида:

$$\Big[\lambda\left(\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)+C_1C_2e^{(\mu_1+\mu_2)t}\right)+$$

$$\left(\lambda_1+\lambda+\lambda C_2e^{\mu_2 t}\right)\left(y_1-1\right)+$$

$$+\left(\lambda_2+\lambda+\lambda C_1e^{\mu_1 t}\right)\left(y_2-1\right)+$$

$$+(\lambda_1+\lambda)C_1e^{\mu_1 t}+(\lambda_2+\lambda)C_2e^{\mu_2 t}\Big]dt=$$

$$=\frac{dF}{F\left(x_1,x_2,y_1,y_2,t\right)} \tag{10}$$

Решение которого имеет вид:

$$\ln F\left(x_1,x_2,y_1,y_2,t\right)-\ln C_3=$$

$$\lambda\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)t+\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}C_1C_2e^{(\mu_1+\mu_2)t}+$$

$$+\left((\lambda_1+\lambda)t+\frac{\lambda}{\mu_2}C_2e^{\mu_2 t}\right)\left(y_1-1\right)+$$

$$+\left((\lambda_2+\lambda)t+\frac{\lambda}{\mu_1}C_1e^{\mu_1 t}\right)\left(y_2-1\right)+$$

$$\frac{\lambda_1+\lambda}{\mu_1}C_1e^{\mu_1 t}+\frac{\lambda_2+\lambda}{\mu_2}C_2e^{\mu_2 t} \tag{11}$$

Предполагая, что $C_3 = \Phi(C_1, C_2)$
можем записать:

$$F\left(x_1, x_2, y_1, y_2, t\right) = \Phi(C_1, C_2) \times \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} C_1 C_2 e^{(\mu_1+\mu_2)t} + \right.$$

$$+\frac{\lambda}{\mu_2} C_2 e^{\mu_2 t}\left(y_1 - 1\right) + \frac{\lambda}{\mu_1} C_1 e^{\mu_1 t}\left(y_2 - 1\right) + \frac{\lambda_1 + \lambda}{\mu_1} C_1 e^{\mu_1 t} + + \frac{\lambda_2 + \lambda}{\mu_2} C_2 e^{\mu_2 t} + \lambda\left(y_1 - 1\right)\left(y_2 - 1\right)t +$$

$$\left. +\left(\lambda_1 + \lambda\right)\left(y_1 - 1\right)t + \left(\lambda_2 + \lambda\right)\left(y_2 - 1\right)t\right\} \quad (12)$$

Подставляя выражения для C_1 и C_2 в (7)

$$F\left(x_1, x_2, y_1, y_2, t\right) = \Phi(\left(x_1 - y_1\right)e^{-\mu_1 t}, \left(x_2 - y_2\right)e^{-\mu_2 t}) \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}\left(x_1 - y_1\right)\left(x_2 - y_2\right) + \right.$$

$$+\frac{\lambda}{\mu_2}\left(x_2 - y_2\right)\left(y_1 - 1\right) + \frac{\lambda}{\mu_1}\left(x_1 - y_1\right)\left(y_2 - 1\right) +$$

$$+\frac{\lambda_1 + \lambda}{\mu_1}\left(x_1 - y_1\right) + \frac{\lambda_2 + \lambda}{\mu_2}\left(x_2 - y_2\right) + \lambda\left(y_1 - 1\right)\left(y_2 - 1\right)t +$$

$$\left. +\left(\lambda_1 + \lambda\right)\left(y_1 - 1\right)t + \left(\lambda_2 + \lambda\right)\left(y_2 - 1\right)t\right\}$$

Учитывая начальное условие запишем:

$$\Phi\left(\left(x_1 - y_1\right), \left(x_2 - y_2\right)\right) =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}\left[\left(x_1 - 1\right)\left(x_2 - 1\right) - \right.\right.$$

$$\left. -\left(x_1 - y_1\right)\left(x_2 - y_2\right)\right] + \frac{\lambda + \lambda_1}{\mu_1}\left(y_1 - 1\right) +$$

$$+\frac{\lambda + \lambda_2}{\mu_2}\left(y_2 - 1\right) - \frac{\lambda}{\mu_2}\left(x_2 - y_2\right)\left(y_1 - 1\right) -$$

$$\left. -\frac{\lambda}{\mu_1}\left(x_1 - y_1\right)\left(y_2 - 1\right)\right\} \quad (13)$$

Тогда выражение (12) для $F(x_1, x_2, y_1, y_2, t)$ примет вид

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, t) = \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{\lambda_2 + \lambda}{\mu_2}(x_2 - 1) + \lambda(y_1 - 1)(y_2 - 1)t + \right.$$
$$\left. (\lambda_1 + \lambda)(y_1 - 1)t + (\lambda_2 + \lambda)(y_2 - 1)t \right\}$$

И подставляя (7) , получаем окончательное выражение

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, t) = \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 - 1)(x_2 - 1) + \right.$$
$$+ \frac{\lambda_1 + \lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda_2 + \lambda}{\mu_2}(x_2 - 1) + \frac{\lambda_1 + \lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) +$$
$$+ \frac{\lambda_2 + \lambda}{\mu_2}(x_2 - 1) + \lambda(y_1 - 1)(y_2 - 1)t +$$
$$\left. + (\lambda_1 + \lambda)(y_1 - 1)t + (\lambda_2 + \lambda)(y_2 - 1)t \right\} \tag{14}$$

Полагая $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$, получаем выражение для производящей функции двумерного выходящего потока

$$F(y_1, y_2, t) = \exp\left\{ \lambda(y_1 - 1)(y_2 - 1)t + (\lambda_1 + \lambda)(y_1 - 1)t + \right.$$
$$\left. + (\lambda_2 + \lambda)(y_2 - 1)t \right\} \tag{15}$$

Одномерные маргинальные распределения вероятностей числа выходящих заявок являются пуассоновскими и имеют вид: $F(y_1, t) = \exp\left\{ (\lambda_1 + \lambda)(y_1 - 1)t \right\}, F(y_2, t) = \exp\left\{ (\lambda_2 + \lambda)(y_2 - 1)t \right\}$.

Результаты и обсуждения

Основные вероятностные характеристики

Согласно свойствам производящей функции, взяв производные соответствующих порядков, можно получить основные вероятностные характеристики.

Учитывая, что

$$F(y_1, y_2, t) = \exp\left\{ \lambda(y_1 - 1)(y_2 - 1)t + \; + (\lambda_1 + \lambda)(y_1 - 1)t + (\lambda_2 + \lambda)(y_2 - 1)t \right\},$$

имеем:

$$\frac{\partial F\left(y_1, y_2, t\right)}{\partial y_1} = \left[\lambda\left(y_2 - 1\right) + \left(\lambda_1 + \lambda\right)\right] t \times$$

$$\times \exp\left\{\lambda\left(y_1 - 1\right)\left(y_2 - 1\right)t + \left(\lambda_1 + \lambda\right)\left(y_1 - 1\right)t +\right.$$

$$\left. + \left(\lambda_2 + \lambda\right)\left(y_2 - 1\right)t\right\} = \left[\lambda y_2 + \lambda_1\right] t \cdot F\left(y_1, y_2, t\right)$$

$$\frac{\partial^2 F\left(y_1, y_2, t\right)}{\partial {y_1}^2} = \left[\lambda y_2 + \lambda_1\right] t \cdot \frac{\partial F\left(y_1, y_2, t\right)}{\partial y_1} =$$

$$= \left(\left[\lambda y_2 + \lambda_1\right] t\right)^2 F\left(y_1, y_2, t\right),$$

Аналогично

$$\frac{\partial F\left(y_1, y_2, t\right)}{\partial y_2} = \left[\lambda\left(y_1 - 1\right) + \left(\lambda_2 + \lambda\right)\right] t \times$$

$$\times \exp\left\{\lambda\left(y_1 - 1\right)\left(y_2 - 1\right)t + \left(\lambda_1 + \lambda\right)\left(y_1 - 1\right)t +\right.$$

$$\left. + \left(\lambda_2 + \lambda\right)\left(y_2 - 1\right)t\right\} = \left[\lambda y_1 + \lambda_2\right] t \cdot F\left(y_1, y_2, t\right)$$

$$\frac{\partial^2 F\left(y_1, y_2, t\right)}{\partial {y_2}^2} = \left[\lambda y_1 + \lambda_2\right] t \cdot \frac{\partial F\left(y_1, y_2, t\right)}{\partial y_2} = \; = \left(\left[\lambda y_1 + \lambda_2\right] t\right)^2 F\left(y_1, y_2, t\right)$$

Учитывая свойства производящих функций получим математическое ожидание числа обслуженных заявок в первом и втором блоках системы:

$$M\left\{n_k\left(t\right)\right\} = \left.\frac{\partial F\left(y_1, y_2, t\right)}{\partial y_k}\right|_{\substack{x_1 = 1 \\ x_2 = 1}} = (\lambda + \lambda_k)t$$

$$\left.\frac{\partial^2 F\left(y_1, y_2, t\right)}{\partial {y_k}^2}\right|_{\substack{y_1 = 1 \\ y_2 = 1}} = M\left\{n_k\left(t\right)\right\}^2 - M\left\{n_k\left(t\right)\right\} =$$

$$\left((\lambda + \lambda_k)t\right)^2, \; \left(k = 1, 2\right).$$

Дисперсия числа обслуженных заявок в первом и втором блоках системы имеет вид:

$$D\left\{n_k\left(t\right)\right\} = M\left\{n_k\left(t\right)\right\}^2 - M^2\left\{n_k\left(t\right)\right\}$$

$$= \left((\lambda + \lambda_k)t\right)^2 + \left((\lambda + \lambda_k)t\right) - \left((\lambda + \lambda_k)t\right)^2 = \; = (\lambda + \lambda_k)t, \; \left(k = 1, 2\right)$$

Используя явный вид производящей функции, можно найти выражение для коэффициента корреляции между компонентами процесса обслуженных требований в рассматриваемой модели. Для этого с помощью определим корреляционный момент

$$\frac{\partial^2 F(y_1,y_2,t)}{\partial y_1 \partial y_2} = \lambda t F(y_1,y_2,t) + [\lambda y_2 + \lambda_1] t \cdot \frac{\partial F(y_1,y_2,t)}{\partial y_2} =$$

$$= \left\{ \lambda t + [\lambda y_2 + \lambda_1][\lambda y_1 + \lambda_2] t^2 \right\} F(y_1,y_2,t) \ ,$$

$$M\{n_1(t) n_2(t)\} = \left. \frac{\partial^2 F(y_1,y_2,t)}{\partial y_1 \partial y_2} \right|_{\substack{y_1=1 \\ y_2=1}} = [\lambda + \lambda_1][\lambda + \lambda_2] t^2 \ .$$

Тогда

$$r(n_1(t) n_2(t)) = \frac{\operatorname{cov}(n_1(t) n_2(t))}{\sqrt{Dn_1(t) Dn_2(t)}} =$$

$$= \frac{\lambda t + [\lambda + \lambda_1][\lambda + \lambda_2] t^2 - [\lambda + \lambda_1][\lambda + \lambda_2] t^2}{\sqrt{(\lambda + \lambda_1) t (\lambda + \lambda_2) t}} =$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2)}}$$

Выводы

В работе проведено исследование СМО с двумя блоками обслуживания, каждый из которых содержит неограниченное количество приборов. Получено выражение для определения производящей функции двумерного выходящего потока, определено, что одномерные маргинальные вероятности являются пуассоновскими, найдены основные вероятностные характеристики.

Список использованных источников

1 **Жожикашвили, В. А., Вишневский, В. М.** Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ. – М. : Радио и связь, 1988. 192 с.

2 **Burke, P. J.** The Output of Queueing Systems // Operations Research. – 1956. – V. 4. – P. 699–704. – 100.

3 **Reich, E.** Waiting Times When Queues are in Tandem // Ann. Math. Statist. – 1957. – V. 28. – No. 3. – P. 768.

4 **Mirasol, N. M.** The output of an M | G | oo queueing system is Poisson // Operations Research. – 1963. – No. 11. – P. 282–284.

5 **Акулиничев, Н. М., Горский, JI. К.** Об асимптотических распределениях выходящих потоков некоторых систем массового обслуживания // Кибернетика. – 1973. – № 1. – С. 71–78.

6 **Disney, R. L., Farell, R. L., de Morais, P. R.** Characterization of M|G|1 Queues with Renewal Departure Processes // Manag. Sci. – 1973. – V. 19. – No. 11. – P. 1222–1228.

7 **Dalay, D. J.** Queueing Output Procecces // Adv. Appl. Probab. – 1976. – V. 8. – P. 395–415.

8 **Goswami, V.** Distribution of the number of customs served during a busy period in a discrete time Geom|Geom|l // Indian J. Pure Appl. Math. – 2002. – V. 33. – No. 9. – P. 1405–1508.

9 **Пройдакова, Е. В., Федоткин, М. А.** Определение условий существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением // Автоматика и телемеханика. –2008. – № 6. – С. 96–106.

10 **Кирпичников, А. П., Титовцев, А. С.** Второй начальный момент времени ожидания начала обслуживания в системах дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков // Вестник Казанского технологического университета. – 2015. – Т. 18. – № 5. – С. 147–152.

11 **Кирпичников, А. П., Титовцев, А. С.** Расчёт плотности распределения времени ожидания в системах дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17. – № 5. – С. 279–281.

12 **Ивановская, И. А.** Исследование математической модели параллельного обслуживания заявок смешанного типа / С. П. Моисеева, И. А. Ивановская // Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика – 2010. – Т. 317. – № 5. – С. 32–34.

13 **Чечельницкий, А. А., Кучеренко, О. В.** Стационарные характеристики параллельно функционирующих систем обслуживания с двумерным входным потоком // Сборник научных статей. – Минск, 2009. – Вып. 2. – С. 262–268.

14 **Синякова, И. А.** Исследование системы MAP(2)|GI2|∞ методом просеянного потока. / С. П. Моисеева, И. А. Синякова // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2012. – Вып. №1 (49). – С. 47–53.

15 **Синякова, И. А.** Метод моментов для исследования математической модели параллельного обслуживания сдвоенных заявок потока марковского восстановления / С. П. Моисеева, И. А. Синякова // Известия Томского

политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – Т. 321. – № 5. – С. 24–29.

References

1 **Zhozhikashvili, V. A., Vishnevskij, V. M.** Seti massovogo obsluzhivaniya. Teoriya i primenenie k setyam EVM. [Mass service Networks. Theory and application to computer networks]. – Moscow : Radio i svyaz', 1988. – P. 192.

2 **Burke, P. J.** The Output of Queueing Systems. In Operations Research. 1956. – Vol. 4. – P. 699–704. 100.

3 **Reich, E.** Waiting Times When Queues are in Tandem. In Ann. Math. Statist. 1957. – Vol. 28. – No. 3. – P. 768.

4 **Mirasol, N. M.** The output of an M | G | oo queueing system is Poisson. In Operations Research. – 1963. – No. 11. – P. 282–284.

5 **Akulinichev, N. M., Gorsky, JI. K.** Ob asimptoticheskix raspredeleniyax vy`xodyashhix potokov nekotory`x sistem massovogo obsluzhivaniya [On asymptotic distributions of outgoing flows of some Queuing systems] In Cybernetics. – 1973. – No. 1. – P. 71–78. 5.

6 **Disney, R. L., Farell, R. L., de Morais, P. R.** Characterization of M|G|1 Queues with Renewal Departure Processes. In Manag. Sci. – 1973. – V. 19. – No. 11. – P. 1222–1228.

7 **Dalay, D. J.** Queueing Output Procecces. In Adv. Appl. Probab. – 1976. – Vol.8. – P. 395–415.

8 **Goswami, V.** Distribution of the number of customs served during a busy period in a discrete time Geom|Geom|l. In Indian J. Pure Appl. Math. – 2002. – Vol. 33. – No. 9. – P. 1405–1508.

9 **Projdakova, E. V., Fedotkin, M. A.** Opredelenie uslovij sushchestvovaniya stacionarnogo raspredeleniya vyhodnyh potokov v sisteme s ciklicheskim upravleniem [Determining the conditions for the existence of a stationary distribution of output flows in a system with cyclic control] In Avtomatika i telemekhanika. – 2008. – No 6. – P. 96–106.

10 **Kirpichnikov, A. P., Titovcev, A. S.** Vtoroj nachal'nyj moment vremeni ozhidaniya nachala obsluzhivaniya v sistemah differencirovannogo obsluzhivaniya polikomponentnyh potokov [The Second initial moment of waiting time for the start of service in systems of differentiated service of multicomponent flows]. In Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta. – 2015. – Vol. 18. – No 5. – P. 147–152.

11 **Kirpichnikov, A. P., Titovcev, A. S.** Raschyot plotnosti raspredeleniya vremeni ozhidaniya v sistemah differencirovannogo obsluzhivaniya polikomponentnyh potokov [Calculation of the waiting time distribution density in

systems of differentiated service of multicomponent flows]. In Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta. – 2014. – Vol. 17. – No 5. – P. 279–281.

12 **Ivanovskaya, I. A.** Issledovanie matematicheskoj modeli parallel’nogo obsluzhivaniya zayavok smeshannogo tipa [Research of the mathematical model of parallel servicing of mixed-type applications]. S. P. Moiseeva, I. A. Ivanovskaya (eds.). In Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Upravlenie, vychislitel’naya tekhnika i informatika. – 2010. – Vol. 317. – No. 5. – P. 32–24.

13 **Chechelnickij, A. A., Kucherenko, O. V.** Stacionarnye harakteristiki parallel’no funkcioniruyushchih sistem obsluzhivaniya s dvumernym vhodnym potokom [Stationary characteristics of parallel functioning service systems with two-dimensional input flow]. In Sbornik nauchnyh statej. – Minsk, 2009. – No. 2. – P. 262–268.

14 **Sinyakova, I. A.** Issledovanie sistemy MAP(2)|GI2|∞ metodom proseyannogo potoka. [Investigation of the MAP(2)|GI2|∞ system by the sifted flow method.] In S. P. Moiseeva, I. A. Sinyakova (eds.). In Vestnik Kemerovskogo gosudarstvennogo universiteta. – 2012. – No. 1 (49). – P. 47–53.

15 **Sinyakova, I. A.** Metod momentov dlya issledovaniya matematicheskoj modeli parallel’nogo obsluzhivaniya sdvoennyh zayavok potoka markovskogo vosstanovleniya [Method of moments for the study of the mathematical model of parallel servicing of dual applications of the Markov recovery flow]. In S.P. Moiseeva, I. A. Sinyakova (eds.). In Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Upravlenie, vychislitel’naya tekhnika i informatika. – 2012. – Vol. 321. – No. 5. – P. 24–29.

Материал поступил в редакцию 30.09.20.

С. П. Моисеева, Т. В. Бушкова

Көп компонентті пуассон ағынына параллель қызмет көрсету жүйесіндегі шығыс ағындарды зерттеу

Томск мемлекеттік ұлттық зерттеу университеті,
Ресей Федерациясы, Томск қ.
Материал 30.09.20 баспаға түсті.

S. P. Moiseeva, T. V. Bushkova

Study of outgoing flows in a parallel service system for a multicomponent poisson flow

National Research Tomsk State University,
Russian Federation, Tomsk.
Material received on 30.09.20.

Осы мақалада t уақытындағы әр типтегі қызмет көрсетілген өтінімдердің санын сипаттайтын екі өлшемді кездейсоқ процесті зерттеу жүргізіледі. шығарылған өтінімдер санының бір өлшемді маргиналды ықтималдылық үлестірімі Пуассон екендігі анықталды, негізгі ықтималдық сипаттамалары табылды.

Кілтті сөздер: параллель қызмет көрсету жүйесі, Шығыс ағыны, өтінімдер санын бөлу, жартылай парк процестері,.аралас түрдегі өтінімдер.

In this article, we study a two-dimensional random process that characterizes the number of served requests of each type during time t. We obtain an expression for the generating function of a two-dimensional outgoing flow. It is determined that the one-dimensional marginal probability distributions of the number of outgoing applications are Poisson, and the main probability characteristics are found.

Keywords: parallel service system, outgoing flow, distribution of the number of requests, semi-Markov processes, mixed-type requests.

Теруге 30.09.2020 ж. жіберілді. Басуға 14.10.2020 ж. қол қойылды.
Электронды баспа
2,99 Mb RAM
Шартты баспа табағы 23,30. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.
Компьютерде беттеген: А. Елемесқызы
Корректор: А. Р. Омарова
Тапсырыс № 3707

Сдано в набор 30.09.2020 г. Подписано в печать 14.10.2020 г.
Электронное издание
2,99 Mb RAM
Усл. печ. л. 23,30. Тираж 300 экз. Цена договорная.
Компьютерная верстка: А. Елемесқызы
Корректор: А. Р. Омарова
Заказ № 3707

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған
«Торайғыров университет»
коммерциялық емес акционерлік қоғамы
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы
«Торайғыров университет»
коммерциялық емес акционерлік қоғамы
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.
8 (7182) 67-36-69
e-mail: kereku@tou.edu.kz
www.vestnik.tou.edu.kz